8. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 17.12.2010)

Aufgabe H15 *Lokalisiertes freies Teilchen* (5 Punkte)

Ein freies Teilchen sei für $t=0$ lokalisiert (die Wellenfunktion, nicht die W.-Dichte!):

$$|\psi(0)\rangle \;=\; |x_0\rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x|\psi(0)\rangle \;=\; \langle x|x_0\rangle \;=\; \delta(x-x_0)\ .$$

Berechnen Sie $\psi(x,t)$ auf die drei aus der 8. Präsenzübung bekannten Arten:

(a) Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach Eigenzuständen $|p\rangle$ des Hamilton-Operators $H=\frac{P^2}{2m}$ und verwenden Sie, dass

$$\langle p|\psi(t)\rangle \;=\; \exp\!\big(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}t\,E(p)\big)\,\langle p|\psi(0)\rangle\ .$$

Hinweise: Im Exponenten quadratisch ergänzen! Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-\beta u^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ für $\mathrm{Re}\beta\geq 0$.

(b) Der Propagator eines freien Teilchens in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \sqrt{\tfrac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}}\ \exp\!\big(\tfrac{\mathrm{i}m(x-y)^2}{2\hbar t}\big)\ .$$

Hinweis: Magie der Delta-Funktion: $\int\mathrm{d}y\ f(y)\,\delta(y-x_0)=f(x_0)$.

(c) Benutzen Sie die Darstellung als exponentierter Differentialoperator

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \delta(x-y)\ \exp\!\big(\tfrac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\partial_y^2\big)\ .$$

Hinweis: Verwenden Sie $f(\partial_y)\ \delta(y-x_0)=f(\partial_y)\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y-x_0)}=\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\ f(\mathrm{i}k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y-x_0)}$.
Dann weiter wie in (a) – siehe dortigen Hinweis ...

Aufgabe H16 *Quantendraht* (5 Punkte)

Ein Teilchen kann sich nur auf der x-Achse zwischen den Koordinaten $x=0$ und $x=L$ bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, es außerhalb dieses Intervalls anzutreffen, ist also null.

(a) Welche Randbedingungen bedeutet dies für die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung? Zeigen Sie, dass der Operator P^2 auf solchen Wellenfunktionen hermitesch ist.

(b) Bestimmen Sie für den Hamiltonoperator $H=\frac{P^2}{2m}$ die Eigenwerte E_n und die normierten Eigenzustände $|n\rangle$ in der Ortsdarstellung. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x)=|\langle x|n\rangle|^2$ eines Teilchens der Energie E_n.

(c) Berechnen Sie für den Zustand $|n\rangle$ die Erwartungswerte $\langle X\rangle$ und $\langle X^2\rangle$ sowie $\langle P\rangle$ und $\langle P^2\rangle$. Überprüfen Sie die Unschärferelation $\Delta P\Delta X\geq\hbar/2$.

Hinweis: Die Integrale mit Rechner oder im Buch oder per Hand (mit partieller Integration).